

Algebrytyka.

mgr inż. Adam Kasperek

19 maja 2026

1. Tw. O nietrywialnej involucji macierzy kwadratowej wymiaru 2.

Dla następującej macierzy w postaci:

$$\mathcal{E} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \quad (1)$$

która ponadto spełnia związek:

$$a^2 + bc = 1 \quad (2)$$

zachodzi równość:

$$\mathcal{E}^2 = E \quad (3)$$

czyli równoważnie:

$$\mathcal{E}^{-1} = \mathcal{E} \quad (4)$$

gdzie E to macierz jednostkowa.

Dowód: Elementarne obliczenia. ■

W szczególności:

$$\begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ \sin(\phi) & -\cos(\phi) \end{bmatrix}^2 = E \quad (5)$$

2. Tw. O reprezentacji jednostki urojonej.

Dla następującej macierzy w postaci:

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \quad (6)$$

która ponadto spełnia związek:

$$a^2 + bc = -1 \quad (7)$$

zachodzi równość:

$$\mathcal{J}^2 = -E \quad (8)$$

czyli równoważnie:

$$\mathcal{J}^{-1} = -\mathcal{J} \quad (9)$$

gdzie E to macierz jednostkowa.

Dowód: Elementarne obliczenia. ■

3. Rozkłady macierzy kwadratowej wymiaru 2.

Rozpatrujemy następujące zagadnienie. Dla dowolnej macierzy kwadratowej Y wymiaru 2 chcemy wyznaczyć jej rozkład na sumę macierzy E oraz $\mathcal{E}$ lub $\mathcal{J}$ (zdefiniowanych poprzednio) wymnożonych przez pewne współczynniki. Mamy więc:

$$Y = a \cdot E + b \cdot \mathcal{C} \quad (10)$$

gdzie $\mathcal{C} = \mathcal{E}$ lub $\mathcal{J}$. Czyli:

$$Y = a \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & -x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Zdefiniujmy wyróżnik macierzy Y jako:

$$\Delta = \left(\frac{y_1 - y_4}{2} \right)^2 + y_2 y_3 \quad (12)$$

Dla $\Delta > 0$ definiujemy rozkład hiperboliczny macierzy Y , a dla $\Delta < 0$ definiujemy rozkład zespolony macierzy Y .

Tw. Osobliwość.

Macierz Y jest osobliwa wtedy i tylko wtedy gdy $\mathcal{C} = \mathcal{E}$ i $|a| = |b|$.

Dowód: Mamy $Y = a \cdot E + b \cdot \mathcal{C}$. Obliczamy:

$$\det(Y) = \det(a \cdot E \pm a \cdot \mathcal{E}) = \quad (13)$$

$$a^2 \cdot \det(E \pm \mathcal{E}) = \quad (14)$$

$$a^2 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 \pm x_1 & x_2 \\ x_3 & 1 \mp x_1 \end{bmatrix} = \quad (15)$$

$$a^2 \cdot (1 - x_1^2 - x_2 x_3) = a^2 \cdot (1 - 1) = 0 \quad (16)$$

Co dowodzi twierdzenia. ■

4. Tw. O rozkładzie hiperbolicznym macierzy kwadratowej wymiaru 2.

Dla danej macierzy Y o wyróżniku

$$\Delta = \left(\frac{y_1 - y_4}{2} \right)^2 + y_2 \cdot y_3 > 0 \quad (17)$$

możemy jednoznacznie wyznaczyć jej rozkład ze współczynnikami a i b w postaci:

$$Y = a \cdot E + b \cdot \mathcal{E} \quad (18)$$

gdzie:

$$a = \frac{y_1 + y_4}{2} \quad (19)$$

$$b = \sqrt{\Delta} \quad (20)$$

A macierz $\mathcal{E}$ jest w postaci:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{b} \cdot \begin{bmatrix} \frac{y_1 - y_4}{2} & y_2 \\ y_3 & -\frac{y_1 - y_4}{2} \end{bmatrix} \quad (21)$$

Dowód: Obliczamy:

$$Y = a \cdot E + b \cdot \mathcal{E} = \quad (22)$$

$$\frac{y_1 + y_4}{2} \cdot E + b \cdot \frac{1}{b} \cdot \begin{bmatrix} \frac{y_1 - y_4}{2} & y_2 \\ y_3 & -\frac{y_1 - y_4}{2} \end{bmatrix} = \quad (23)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{y_1 + y_4}{2} & 0 \\ 0 & \frac{y_1 + y_4}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{y_1 - y_4}{2} & y_2 \\ y_3 & -\frac{y_1 - y_4}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{bmatrix} = Y \quad (24)$$

Sprawdzamy jeszcze macierz $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E}^2 = \frac{1}{b^2} \cdot \begin{bmatrix} \frac{y_1 - y_4}{2} & y_2 \\ y_3 & -\frac{y_1 - y_4}{2} \end{bmatrix}^2 = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{bmatrix} = E \quad (25)$$

Co dowodzi twierdzenia. ■

5. Tw. O rozkładzie zespolonym macierzy kwadratowej wymiaru 2.

Dla danej macierzy chcemy zapisać ją w postaci:

$$Y = a \cdot E + b \cdot \mathcal{J} \quad (26)$$

czyli:

$$Y = a \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & -x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{bmatrix} \quad (27)$$

Wyróżnik macierzy Y to:

$$\Delta = \left(\frac{y_1 - y_4}{2} \right)^2 + y_2 \cdot y_3 \quad (28)$$

Jeżeli $\Delta < 0$, to wówczas mamy:

$$a = \frac{y_1 + y_4}{2} \quad (29)$$

$$b = \sqrt{-\Delta} \quad (30)$$

A jednostka urojona jest w postaci:

$$\mathcal{J} = \frac{1}{b} \cdot \begin{bmatrix} \frac{y_1 - y_4}{2} & y_2 \\ y_3 & -\frac{y_1 - y_4}{2} \end{bmatrix} \quad (31)$$

Dowód:

Ze wzoru na Y otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} a + bx_1 = y_1 \\ bx_2 = y_2 \\ bx_3 = y_3 \\ a - bx_1 = y_4 \end{cases} \quad (32)$$

Stąd natychmiast otrzymujemy wzór na a :

$$a = \frac{y_1 + y_4}{2} \quad (33)$$

Oraz:

$$bx_1 = \frac{y_1 - y_4}{2} \quad (34)$$

Współczynniki $\mathcal{J}$ spełniają równość (**Tw. 2**):

$$x_1^2 + x_2x_3 = -1 \quad (35)$$

Po obustronnym pomnożeniu przez b^2 otrzymujemy:

$$(bx_1)^2 + bx_2 \cdot bx_3 = -b^2 \quad (36)$$

$$\frac{1}{4}(y_1 - y_4)^2 + y_2 \cdot y_3 = -b^2 \quad (37)$$

A stąd natychmiast otrzymujemy wzór na b oraz współczynniki macierzy $\mathcal{J}$ z podanego wcześniej układu równań. ■

6. Przypadek $\Delta = 0$ (pierścień $\mathcal{C}^2 = 0$).

W tym wypadku dokonujemy modyfikacji macierzy Y wprowadzając parametr ϵ , przechodząc wtedy do rozkładu nad $\mathcal{E}$ (lub $\mathcal{J}$), wykonując żądane operacje i przechodząc do granicy $\epsilon \rightarrow 0$. Wyprowadzimy w ten sposób wzór na szybkie potęgowanie (pierwiastkowanie) macierzy o wyróżniku $\Delta = 0$.

Mamy:

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$\Delta = \left(\frac{y_1 - y_4}{2} \right)^2 + y_2 \cdot y_3 \quad (39)$$

Wiadomo, że dla $\Delta = 0$ zachodzi $y_2 \cdot y_3 < 0$, dlatego przyjmujemy niżej jeden z przypadków, dla drugiego obliczenia są analogiczne i dlatego (przez symetrię) je pomijamy, nie wpływa to na meritum dowodu.

$$y_2 > 0, y_3 < 0 \Rightarrow y_2 \rightarrow y_2 - \epsilon, \epsilon > 0 \quad (40)$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{b} \cdot \begin{bmatrix} \frac{y_1 - y_4}{2} & y_2 - \epsilon \\ y_3 & -\frac{y_1 - y_4}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{b} \cdot H(\epsilon) \quad (41)$$

$$\Delta = -\epsilon y_3 > 0 \quad (42)$$

$$b = \sqrt{\Delta} = \sqrt{|\epsilon y_3|} \quad (43)$$

Obliczamy:

$$(a \cdot E + b \cdot \mathcal{E})^n = \frac{1}{2} \cdot ((a+b)^n + (a-b)^n) \cdot E + \frac{1}{2} \cdot ((a+b)^n - (a-b)^n) \cdot \mathcal{E} \quad (44)$$

$$\epsilon \rightarrow 0 \Rightarrow b \rightarrow 0 \quad (45)$$

Wobec czego mamy:

$$Y^n = \lim_{b \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} \cdot ((a+b)^n + (a-b)^n) \cdot E + \frac{1}{2} \cdot ((a+b)^n - (a-b)^n) \cdot \mathcal{E} \right) = \quad (46)$$

$$= a^n \cdot E + \lim_{b \rightarrow 0} \frac{1}{2} \cdot ((a+b)^n - (a-b)^n) \cdot \frac{1}{b} \cdot H(\epsilon) = \quad (47)$$

$$= a^n \cdot E + \frac{1}{2} \cdot \lim_{b \rightarrow 0} \frac{((a+b)^n - (a-b)^n)}{b} \cdot H(\epsilon) = \quad (48)$$

$$= a^n \cdot E + \frac{1}{2} \cdot \lim_{b \rightarrow 0} \frac{((a+b)^n - a^n) + (a^n - (a-b)^n)}{b} \cdot H(\epsilon) = \quad (49)$$

$$a^n \cdot E + \frac{1}{2} ((a^n)' + (a^n)') \cdot H(0) = a^n \cdot E + n a^{n-1} \cdot H(0) \quad (50)$$

Warto też przyjrzeć się analogicznemu obliczeniu dla rozkładu nad $\mathcal{J}$ dla $a > 0$ ($a = |a|$):

$$Y^n = \lim_{b \rightarrow 0} \left(\sqrt{a^2 + b^2} \right)^n \cdot \left(\cos \left(n \cdot \arctan \frac{b}{a} \right) \cdot E + \sin \left(n \cdot \arctan \frac{b}{a} \right) \cdot \mathcal{J} \right) = \quad (51)$$

$$= |a|^n \cdot \left(\cos(n \cdot 0) \cdot E + \lim_{b \rightarrow 0} \frac{\sin \left(n \cdot \arctan \frac{b}{a} \right)}{b} \cdot H(\epsilon) \right) = \quad (52)$$

$$= |a|^n \cdot E + |a|^n \cdot \lim_{b \rightarrow 0} \left(\cos \left(n \cdot \arctan \frac{b}{a} \right) \cdot \frac{n}{1 + \left(\frac{b}{a} \right)^2} \cdot \frac{1}{a} \cdot H(\epsilon) \right) = \quad (53)$$

$$= |a|^n \cdot E + |a|^n \cdot \cos(n \cdot 0) \cdot \frac{n}{1 + \left(\frac{0}{a} \right)^2} \cdot \frac{1}{|a|} \cdot H(0) = \quad (54)$$

$$= |a|^n \cdot E + n|a|^{n-1} \cdot H(0) = a^n \cdot E + na^{n-1} \cdot H(0) \quad (55)$$

Natomiast dla $a < 0$ ($a = -|a|$):

$$Y^n = \lim_{b \rightarrow 0} \left(\sqrt{a^2 + b^2} \right)^n \cdot \left(\cos \left(n \cdot \arctan \frac{b}{a} \right) \cdot E + \sin \left(n \cdot \arctan \frac{b}{a} \right) \cdot \mathcal{J} \right) = \quad (56)$$

$$= |a|^n \cdot \left(\cos(n \cdot \pi) \cdot E + \lim_{b \rightarrow 0} \frac{\sin \left(n \cdot \arctan \frac{b}{a} \right)}{b} \cdot H(\epsilon) \right) = \quad (57)$$

$$= |a|^n \cdot (-1)^n \cdot E + |a|^n \cdot \lim_{b \rightarrow 0} \left(\cos \left(n \cdot \arctan \frac{b}{a} \right) \cdot \frac{n}{1 + \left(\frac{b}{a} \right)^2} \cdot \frac{1}{a} \cdot H(\epsilon) \right) = \quad (58)$$

$$= (-|a|)^n \cdot E + |a|^n \cdot \cos(n \cdot \pi) \cdot \frac{n}{1 + \left(\frac{0}{a} \right)^2} \cdot \frac{1}{-|a|} \cdot H(0) = \quad (59)$$

$$= a^n \cdot E + n|a|^{n-1} \cdot (-1)^{n-1} \cdot H(0) = a^n \cdot E + n(-|a|)^{n-1} \cdot H(0) = a^n \cdot E + na^{n-1} \cdot H(0) \quad (60)$$

Dostajemy zatem ten sam wynik.

7. Rozkłady macierzy i pierwiastkowanie.

Twierdzenie. Każdą macierz kwadratową wymiaru 2 o wyróżniku Δ można rozłożyć z dokładnością do znaku nad $\mathcal{E}$ lub $\mathcal{J}$ lub nad O ($\mathcal{C}^2 = 0$) z dokładnością do proporcjonalności.

Dowód: Wniosek z poprzednich rozważań. ■

Definicja. Mówimy, że macierz rozkłada się nad pierścieniem $\mathcal{Z}$, gdy rozkłada się ona nad określoną macierzą $\mathcal{Z}$ gdzie $\mathcal{Z}^2 = \{-E, O, E\}$. Dla $\mathcal{Z}^2 = -E$ otrzymamy ciało.

Dla ustalonej macierzy $\mathcal{E}$ elementy (a, b) tworzą pierścień. Elementy odwracalne spełniają warunek: $|a| \neq |b|$. Jak łatwo zauważyć działaniami grupowymi są dodawanie i mnożenie w/g wzorów:

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \quad (61)$$

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2 + b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2) \quad (62)$$

$$(a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 - b^2}, -\frac{b}{a^2 - b^2} \right) \quad (63)$$

$$(a, b)^n = \frac{1}{2} \cdot ((a + b)^n + (a - b)^n, (a + b)^n - (a - b)^n) \quad (64)$$

$$\sqrt[n]{(a, b)} = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt[n]{a + b} + \sqrt[n]{a - b}, \sqrt[n]{a + b} - \sqrt[n]{a - b} \right) \quad (65)$$

Udowodnimy ostatni wzór:

$$(\sqrt[n]{(a, b)})^n = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt[n]{a + b} + \sqrt[n]{a - b} + \sqrt[n]{a + b} - \sqrt[n]{a - b} \right) \right)^n \right) \cdot E + \quad (66)$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt[n]{a + b} + \sqrt[n]{a - b} - \sqrt[n]{a + b} + \sqrt[n]{a - b} \right) \right)^n \right) \cdot E + \quad (67)$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt[n]{a + b} + \sqrt[n]{a - b} + \sqrt[n]{a + b} - \sqrt[n]{a - b} \right) \right)^n \right) \cdot \mathcal{E} + \quad (68)$$

$$- \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt[n]{a + b} + \sqrt[n]{a - b} - \sqrt[n]{a + b} + \sqrt[n]{a - b} \right) \right)^n \right) \cdot \mathcal{E} = \quad (69)$$

$$= \frac{1}{2} (a + b) \cdot E + \frac{1}{2} (a - b) \cdot E + \quad (70)$$

$$+ \frac{1}{2} (a + b) \cdot \mathcal{E} - \frac{1}{2} (a - b) \cdot \mathcal{E} = \quad (71)$$

$$= a \cdot E + b \cdot \mathcal{E} = (a, b) \quad (72)$$

Natomiast dla ustalonej macierzy $\mathcal{J}$ elementy (a, b) tworzą ciało liczb zespolonych. Zachodzą wówczas wszystkie wzory na dodawanie, mnożenie, odwracanie i pierwiastkowanie w dziedzinie liczb zespolonych.

8. Twierdzenie o involucji macierzy kwadratowej wymiaru 3 nad $\mathbf{Z}$.

Dla następującej macierzy w postaci:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} x & A & B \\ C & y & D \\ E & F & z \end{bmatrix} \quad (73)$$

która ponadto spełnia związek:

$$| \operatorname{Tr} \mathcal{A} | = 1 \quad (74)$$

czyli:

$$x + y + z = \pm 1 \quad (75)$$

istnieje involucja:

$$\mathcal{A}^2 = \mathbb{E} \quad (76)$$

spełniająca związki:

$$A \cdot C = xy \pm z \quad (77)$$

$$B \cdot E = xz \pm y \quad (78)$$

$$D \cdot F = yz \pm x \quad (79)$$

$$A \cdot E \cdot D = C \cdot B \cdot F \quad (80)$$

Ponadto zachodzi:

$$x + y + z = 1 \implies A \cdot E \cdot D = -(x + y) \cdot (1 - x) \cdot (1 - y) \quad (81)$$

$$x + y + z = -1 \implies A \cdot E \cdot D = -(x + y) \cdot (1 + x) \cdot (1 + y) \quad (82)$$

Dowód:

Rozwiązujemy następujący układ równań powstały ze związku $\mathcal{A}^2 = \mathbb{E}$, gdzie $\mathbb{E}$ to macierz jednostkowa wymiaru 3:

$$\begin{bmatrix} x & A & B \\ C & y & D \\ E & F & z \end{bmatrix}^2 = \mathbb{E} \quad (83)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + AC + BE = 1 \\ y^2 + AC + DF = 1 \\ z^2 + BE + DF = 1 \\ xA + yA + BF = 0 \\ xB + AD + zB = 0 \\ xC + yC + DE = 0 \\ BC + yD + zD = 0 \\ xE + CF + zE = 0 \\ AE + yF + zF = 0 \end{array} \right. \quad (84)$$

Przekształcamy odpowiednio równania z zerem po prawej stronie:

$$\left\{ \begin{array}{l} A(x + y) = -BF \\ B(x + z) = -AD \\ C(x + y) = -DE \\ D(y + z) = -BC \\ E(x + z) = -CF \\ F(y + z) = -AE \end{array} \right. \quad (85)$$

A stąd otrzymujemy potrzebną tożsamość:

$$A \cdot E \cdot D = C \cdot B \cdot F \quad (86)$$

Następnie każde z równań mnożymy przez odpowiednią liczbę dopełniając do $A \cdot E \cdot D$ lub $C \cdot B \cdot F$. Dalej standaryzujemy wszystko do $A \cdot E \cdot D$ i okazuje się, że połowa równań jest nadmiarowa i można je usunąć z układu. Otrzymujemy dalej:

$$\left\{ \begin{array}{l} AC(x + y) = -AED \\ BE(x + z) = -AED \\ DF(y + z) = -AED \end{array} \right. \quad (87)$$

Otrzymujemy dalej wzór:

$$x + y + z = -\frac{1}{2} \cdot AED \cdot \left(\frac{1}{AC} + \frac{1}{BE} + \frac{1}{DF} \right) \quad (88)$$

Z pierwszego układu równań z jedynekami po prawej stronie po elementarnych przekształceniach mamy:

$$AC = \frac{1}{2} \cdot (1 - x^2 - y^2 + z^2) \quad (89)$$

$$BE = \frac{1}{2} \cdot (1 - x^2 + y^2 - z^2) \quad (90)$$

$$DF = \frac{1}{2} \cdot (1 + x^2 - y^2 - z^2) \quad (91)$$

Dalej wykorzystujemy własność śladu macierzy $\mathcal{A}$:

$$x + y + z = 1 \quad (92)$$

$$(x + y)^2 = (1 - z)^2 \quad (93)$$

$$x^2 + y^2 + 2xy = 1 + z^2 - 2z \quad (94)$$

$$1 - x^2 - y^2 + z^2 = 2z + 2xy \quad (95)$$

Podstawiamy powyższą równość do wzoru na $A \cdot C$, i stosując symetrię dla pozostałych czynników otrzymujemy:

$$A \cdot C = xy + z \quad (96)$$

$$B \cdot E = xz + y \quad (97)$$

$$D \cdot F = yz + x \quad (98)$$

Pozostaje udowodnić rozkład AED :

$$x + y + z = 1 = -\frac{1}{2} \cdot AED \cdot \left(\frac{1}{AC} + \frac{1}{BE} + \frac{1}{DF} \right) \quad (99)$$

Sprowadzamy do wspólnego licznika i korzystamy z tożsamości $AED = CBF$:

$$1 = -\frac{1}{2} \cdot AED \cdot \left(\frac{BEDF + ACDF + ACBE}{ACBEDF} \right) = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{BEDF + ACDF + ACBE}{AED} \right) \quad (100)$$

$$AED = -\frac{1}{2} \cdot (BEDF + ACDF + ACBE) \quad (101)$$

Po podstawieniach otrzymujemy:

$$AED = -\frac{1}{2} \cdot ((xz + y) \cdot (yz + x) + (xy + z) \cdot (yz + x) + (xy + z) \cdot (xz + y)) \quad (102)$$

Następnie uwzględniając równość $z = 1 - x - y$ otrzymujemy elementarnym rachunkiem:

$$AED = -\frac{1}{2} \cdot ((x(1-x-y)+y) \cdot (y(1-x-y)+x) + (xy+1-x-y) \cdot (y(1-x-y)+x) + (xy+1-x-y) \cdot (x(1-x-y)+y)) \quad (103)$$

$$+(xy + 1 - x - y) \cdot (x(1 - x - y) + y)) \quad (104)$$

$$AED = -\frac{1}{2} \cdot ((x+y)^2 \cdot (1-x) \cdot (1-y) + (1-y)^2 \cdot (1-x) \cdot (x+y) + (1-y) \cdot (1-x)^2 \cdot (x+y)) = \quad (105)$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot (x+y) \cdot (1-x) \cdot (1-y) \cdot (x+y+1-y+1-x)) \quad (106)$$

$$A \cdot E \cdot D = -(x+y) \cdot (1-x) \cdot (1-y) \quad (107)$$

Co dowodzi zasadniczej tezy twierdzenia, dla $Tr \mathcal{A} = 1$. Aby uzyskać tezę twierdzenia dla $Tr \mathcal{A} = -1$, należy zauważyć odpowiednią symetrię, że dla takiej macierzy macierz $-\mathcal{A}$ spełnia wszystkie warunki dla tezy poprzednio udowodnionej, w szczególności wzór na $A \cdot E \cdot D$ zmieni się na taki jak w tezie twierdzenia, gdy zamienimy jednocześnie x na $-x$ i y na $-y$ i A na $-A$ i E na $-E$ i D na $-D$, i z na $-z$, ponieważ całą macierz mnożymy przez -1 . ■

9. Inwolucja, nilpotencja i jednostka urojona macierzy kwadratowej wymiaru 4.

Lemat. Dwie macierze kwadratowe wymiaru 2 komutują wtedy i tylko wtedy gdy można je rozłożyć nad tym samym pierścieniem $\mathcal{Z}$.

Dowód. Jeżeli zachodzi:

$$\begin{cases} Y_1 = a_1 E + b_1 \mathcal{Z} \\ Y_2 = a_2 E + b_2 \mathcal{Z} \end{cases} \quad (108)$$

to oczywiście zachodzi:

$$Y_1 \cdot Y_2 = Y_2 \cdot Y_1 \quad (109)$$

Ponieważ $\mathcal{Z}^2 = \{-E, O, E\}$. Dowód w drugą stronę. Zauważamy, że dla badanych macierzy zachodzi:

$$\begin{cases} Y_1 = a_1 E + b_1 \mathcal{Z}_1 \\ Y_2 = a_2 E + b_2 \mathcal{Z}_2 \end{cases} \quad (110)$$

Prosty rachunek pokazuje, że jeżeli macierze Y_1 i Y_2 komutują, to wówczas muszą komutować także macierze $\mathcal{Z}_1$ i $\mathcal{Z}_2$. Rozpatrzmy zatem kluczowe iloczyny $\mathcal{Z}_1 \cdot \mathcal{Z}_2$ i $\mathcal{Z}_2 \cdot \mathcal{Z}_1$, wiedząc, że macierze te są w postaci:

$$\mathcal{Z}_1 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \quad (111)$$

$$\mathcal{Z}_2 = \begin{bmatrix} d & e \\ f & -d \end{bmatrix} \quad (112)$$

$$\mathcal{Z}_1 \cdot \mathcal{Z}_2 = \begin{bmatrix} (ad + bf) & (ae - bd) \\ (cd - af) & (ad + ce) \end{bmatrix} \quad (113)$$

$$\mathcal{Z}_2 \cdot \mathcal{Z}_1 = \begin{bmatrix} (ad + ce) & (bd - ae) \\ (af - cd) & (ad + bf) \end{bmatrix} \quad (114)$$

Co prowadzi do związków:

$$bf = ce \quad (115)$$

$$ae = bd \quad (116)$$

$$cd = af \quad (117)$$

Z dwóch ostatnich wzorów wynika pierwszy. Przekształcamy:

$$e = \frac{db}{a} \quad (118)$$

$$f = \frac{dc}{a} \quad (119)$$

Teraz obliczamy:

$$\mathcal{Z}_1 \cdot \mathcal{Z}_2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d & \frac{db}{a} \\ \frac{dc}{a} & -d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \cdot \frac{d}{a} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} = \frac{d}{a} \cdot \mathcal{Z}_1^2 \quad (120)$$

Przez symetrię zachodzi również:

$$\mathcal{Z}_2 \cdot \mathcal{Z}_1 = \frac{a}{d} \cdot \mathcal{Z}_2^2 \quad (121)$$

Dalej mamy:

$$\mathcal{Z}_1 \cdot \mathcal{Z}_2 - \mathcal{Z}_2 \cdot \mathcal{Z}_1 = \frac{1}{ad} \cdot (d\mathcal{Z}_1 - a\mathcal{Z}_2) \cdot (d\mathcal{Z}_1 + a\mathcal{Z}_2) \quad (122)$$

A zatem, jeżeli macierze $\mathcal{Z}_1$ i $\mathcal{Z}_2$ komutują, to prowadzi to do ostatecznego wniosku, że:

$$\mathcal{Z}_1 = \pm \frac{a}{d} \cdot \mathcal{Z}_2 \quad (123)$$

Co dowodzi lematu dla rozkładu macierzy nad pierścieniem $\mathcal{O}$. Dla pozostałych dwóch dziedzin wystarczy zauważyć, że:

$$\mathcal{Z}_1^2 = \left(\pm \frac{a}{d}\right)^2 \cdot \mathcal{Z}_2^2 \quad (124)$$

$$\pm E = \left(\frac{a}{d}\right)^2 \cdot (\pm E) \quad (125)$$

a zatem $a = \pm d$ i to kończy dowód twierdzenia. ■

Każdą macierz kwadratową wymiaru 4, można zdekomponować do 4 macierzy wymiaru 2. Mamy wówczas:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (126)$$

Tw. O nośniku $\mathcal{A}$ wymiaru 4.

Macierz kwadratowa $\mathcal{A}$ wymiaru 4 jest nośnikiem ciała $\mathbb{Z}$ wtedy i tylko wtedy gdy:

$$D = -A \quad (127)$$

$$A^2 + B \cdot C = \mathcal{Z}^2 = \{-E, O, E\} \quad (128)$$

oraz gdy wszystkie macierze A , B i C rozkładają się nad tym samym pierścieniem $\mathcal{Z}$.

Innymi słowy oznacza to, że:

$$\mathcal{A}^2 = \mathbb{Z}^2 = \{-\mathbb{E}, \mathbb{O}, \mathbb{E}\} \quad (129)$$

Gdzie $\mathbb{E}$ i $\mathbb{O}$ to macierze wymiaru 4.

Dowód: Dowód w jedną stronę wynika natychmiast z własności ciała $\mathbb{Z}$. Natomiast dowód w drugą stronę wynika z faktu, że wówczas wszystkie macierze A , B i C muszą komutować, a zatem na mocy poprzedniego lematu, rozkładają się nad tym samym pierścieniem $\mathcal{Z}$. ■

10. Ogólne związki.

$$A^2 = E \implies (A^T)^2 = E \quad (130)$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot (C + E) \quad (131)$$

$$C = 2 \cdot P - E \quad (132)$$

$$(E + \alpha G)^{-1} = E - \alpha G \quad (133)$$

$$G^2 = O \quad (134)$$

$$C^2 = E \quad (135)$$

$$P^2 = P \quad (136)$$

$$(A\mathbb{E} + B\mathcal{Z})^{-1} = \frac{A\mathbb{E} - B\mathcal{Z}}{A^2\mathbb{E} - B^2\mathcal{Z}^2} \quad (137)$$

$$\mathcal{Z}^2 = \{-\mathbb{E}, \mathbb{O}, \mathbb{E}\} \quad (138)$$

$$A, B \in K \quad A, B \neq O \quad (139)$$

Twierdzenie Cayleya–Hamiltona mówi, że każda macierz kwadratowa jest pierwiastkiem swojego wielomianu charakterystycznego. W szczególności dla dowolnej macierzy kwadratowej X wymiaru 2 zachodzi związek:

$$X^2 - \text{Tr}(X) \cdot X + \text{Det}(X) \cdot E = 0 \quad (140)$$

Tw. Grupa macierzy kwadratowych nad $\mathbb{Z}$.

Macierze kwadratowe nad $\mathbb{Z}$ tworzą grupę ze względu na mnożenie wtedy i tylko wtedy, gdy ich wyznacznik jest równy ± 1 .

Dowód. Istotne jest tylko rozważenie odwracalności, ponieważ pozostałe wymogi definicji grupy są przez macierze kwadratowe spełnione (w tym: element neutralny, łączność, wewnętrzność z tw. o wyznaczniku iloczynu macierzy). Jeżeli do danej macierzy X o wyznaczniku $W \neq 0$ istnieje macierz odwrotna X^{-1} o wyznaczniku $W^{-1} \in \mathbb{Z}$, to zakładając, że $W \neq \pm 1$ otrzymamy $W^{-1} \notin \mathbb{Z}$, co powoduje sprzeczność, a zatem dowód w jedną stronę jest zakończony. Jeżeli teraz wyznacznik W macierzy X jest równy ± 1 , to z klasycznej konstrukcji macierzy X^{-1} wynika, że macierz ta należy do grupy macierzy nad $\mathbb{Z}$ (obliczenia dopełnień algebraicznych nie wychodzą poza $\mathbb{Z}$) i jej wyznacznik $W^{-1} = \pm 1$, z tw. o wyznaczniku iloczynu macierzy. To kończy dowód. ■

11. Transformata Fouriera jądra Gaussa.

$$h(t, x) = t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi x^2}{t}} \quad (141)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} dx = 1 \quad (\text{z tw. Fubiniego}) \quad (142)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(t, x) dx = t^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi x^2}{t}} dx = \left| \begin{array}{l} x = \sqrt{t} \cdot y \\ dx = \sqrt{t} \cdot dy \end{array} \right| = t^{-\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi y^2} dy = 1 \quad (143)$$

$$F(t, \lambda) = \mathcal{F}(h(t, x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t, x) \cdot e^{-2\pi i x \lambda} dx \quad (144)$$

$$F(t, 0) = 1 \quad (145)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = t^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2\pi x) \cdot t^{-1} \cdot e^{-\frac{\pi x^2}{t}} = (-2\pi x) \cdot t^{-1} \cdot h(t, x) \quad (146)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = \int_{-\infty}^{+\infty} (-2\pi i x) \cdot h(t, x) \cdot e^{-2\pi i x \lambda} dx = i \cdot t \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial h}{\partial x} \cdot e^{-2\pi i x \lambda} dx = -2\pi t \lambda \cdot F(t, \lambda) \quad (147)$$

$$G(t, \lambda) = F(t, \lambda) \cdot e^{\pi t \lambda^2} \quad (148)$$

$$G(t, 0) = 1 \quad (149)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda} = \frac{\partial F}{\partial \lambda} \cdot e^{\pi t \lambda^2} + F(t, \lambda) \cdot (2\pi t \lambda) \cdot e^{\pi t \lambda^2} = -2\pi t \lambda \cdot F(t, \lambda) \cdot e^{\pi t \lambda^2} + F(t, \lambda) \cdot (2\pi t \lambda) \cdot e^{\pi t \lambda^2} = 0 \quad (150)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda} = 0 \implies G(t, \lambda) = G(t, 0) = 1 \implies F(t, \lambda) = e^{-\pi t \lambda^2} \quad (151)$$

12. Wzór Hankela.

Rozpatrzmy funkcję tworzącą ciąg a_n :

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n \quad (152)$$

I rozpatrzmy następującą całkę krzywoliniową:

$$\oint z^n dz = \int_0^{2\pi} (re^{i\phi})^n d(re^{i\phi}) = r^{n+1} \cdot i \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\phi} d\phi \quad (153)$$

Dla $n = -1$ mamy:

$$= r^{-1+1} \cdot i \int_0^{2\pi} e^{i(-1+1)\phi} d\phi = i \cdot \int_0^{2\pi} 1 \cdot d\phi = 2\pi i \quad (154)$$

Natomiast dla pozostałych $n \neq -1$ dowodzimy, że całka ta jest równa zero:

$$= r^{n+1} \cdot i \cdot \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\phi} d\phi = \frac{r^{n+1}}{n+1} \cdot e^{i(n+1)\phi} \Big|_0^{2\pi} = \frac{r^{n+1}}{n+1} \cdot (\cos(2\pi(n+1)) - \cos(0)) = 0 \quad (155)$$

Teraz chcemy wydobyć m -ty współczynnik z funkcji $G(z)$, w tym celu dzielimy funkcję $G(z)$ najpierw przez z^m i jeszcze przez z aby przy współczynniku a_m uzyskać wyraz z^{-1} . Wynik jeszcze dzielimy przez otrzymany wcześniej czynnik $2\pi i$. Otrzymujemy:

$$a_m = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{G(z)}{z^{m+1}} dz \quad (156)$$

Wreszcie rozpatrzmy funkcję $G(z) = e^z$. Mamy:

$$\frac{1}{m!} = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{e^z}{z^{m+1}} dz \quad (157)$$

Podstawiamy $m! = \Gamma(m+1)$:

$$\frac{1}{\Gamma(m+1)} = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{e^z}{z^{m+1}} dz \quad (158)$$

I trywialnie uogólniamy na wszystkie liczby zespolone podstawiając $s = m+1$:

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{e^z}{z^s} dz \quad (159)$$

Otrzymaliśmy znany wzór Hankela.

13. Rekurencja Fermata.

Rozpatrujemy następujące wyrażenie:

$$w_n = z^n - y^n - x^n \quad (160)$$

dla $x, y, z \in \mathbb{Z}_+$ i przyjmując, że liczby te nie mają wspólnego dzielnika $g > 1$.

Przechodzimy do rekurencji, gdzie otrzymujemy:

$$w_n = (x + y + z) \cdot w_{n-1} - (xy + xz + yz) \cdot w_{n-2} + xyz \cdot w_{n-3} \quad (161)$$

Przyjmujemy ponadto: $w_0 = -1$, $w_1 = z - y - x$, $w_2 = z^2 - y^2 - x^2$

Ponieważ głębokość rekurencji wynosi 3, wnioski dla równania na w_n zachodzą tylko dla $n \geq 3$. Dalej badamy równanie szukając $w_n = 0$:

$$0 = (x + y + z) \cdot w_{n-1} - (xy + xz + yz) \cdot w_{n-2} + xyz \cdot w_{n-3} \quad (162)$$

Co prowadzi do związku:

$$w_{n-1} = \frac{xy + xz + yz}{x + y + z} \cdot w_{n-2} - \frac{xyz}{x + y + z} \cdot w_{n-3} \quad (163)$$

Aby w_{n-1} było w postaci liczby całkowitej należy przyjąć sprzecznie z założeniem $x = \alpha g$, $y = \beta g$, $z = \gamma g$, i ponadto należy przyjąć warunek: $g = \alpha + \beta + \gamma$. A zatem na podstawie tego wszystkiego wnioskujemy, że w_{n-1} nie będzie w postaci liczby całkowitej, co dowodzi twierdzenia Fermata. Aby się o tym przekonać znajdziemy postać zwartą dla rekurencji:

$$m_k = \frac{xy + xz + yz}{x + y + z} \cdot m_{k-1} - \frac{xyz}{x + y + z} \cdot m_{k-2} \quad (164)$$

Gdzie oznaczamy warunki początkowe: $m_0 = w_{n-3}$, $m_1 = w_{n-2}$

Rozwiązanie jest w postaci:

$$m_k = \frac{(-m_1 + m_0 \cdot \lambda_2) \cdot \lambda_1^k + (m_1 - m_0 \cdot \lambda_1) \cdot \lambda_2^k}{\lambda_2 - \lambda_1} \quad (165)$$

Gdzie:

$$\lambda_1 = \frac{xy + xz + yz + \sqrt{d}}{2 \cdot (x + y + z)} \quad (166)$$

$$\lambda_2 = \frac{xy + xz + yz - \sqrt{d}}{2 \cdot (x + y + z)} \quad (167)$$

$$d = (xy + xz + yz)^2 - 4xyz \cdot (x + y + z) \quad (168)$$

Jeżeli $d \leq 0$ to oznaczamy wykorzystując jednostkę zespoloną $i^2 = -1$:

$$\lambda_1 = r \cdot e^{i\phi} \quad (169)$$

$$\lambda_2 = r \cdot e^{-i\phi} \quad (170)$$

$$a = \Re(\lambda_1) = r \cdot \cos(\phi) \quad (171)$$

$$b = \Im(\lambda_1) = r \cdot \sin(\phi) \quad (172)$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (173)$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \quad (174)$$

Jeżeli $d \geq 0$ to oznaczamy wykorzystując jednostkę hiperboliczną $h^2 = 1$:

$$\lambda_1 = r \cdot e^{h\phi} \quad (175)$$

$$\lambda_2 = r \cdot e^{-h\phi} \quad (176)$$

$$a = \Re(\lambda_1) = r \cdot \cosh(\phi) \quad (177)$$

$$b = \Im(\lambda_1) = r \cdot \sinh(\phi) \quad (178)$$

$$r = \sqrt{a^2 - b^2} \quad (179)$$

$$\phi = \operatorname{artanh}\left(\frac{b}{a}\right) \quad (180)$$

Podstawiamy do wzoru dla $d \leq 0$:

$$m_k = \frac{(-m_1 + m_0 \cdot r \cdot e^{-i\phi}) \cdot r^k \cdot e^{ki\phi} + (m_1 - m_0 \cdot r \cdot e^{i\phi}) \cdot r^k \cdot e^{-ki\phi}}{-2 \cdot r \cdot \sin(\phi) \cdot i} \quad (181)$$

Otrzymujemy wzór:

$$m_k = r^{k-1} \cdot m_1 \cdot \frac{\sin(k\phi)}{\sin(\phi)} - r^k \cdot m_0 \cdot \frac{\sin((k-1)\phi)}{\sin(\phi)} \quad (182)$$

Dla dowodu twierdzenia Fermata interesujący jest jedynie przypadek $k = 2$. Otrzymujemy:

$$m_2 = 2 \cdot r \cdot m_1 \cdot \cos(\phi) - r^2 \cdot m_0 \quad (183)$$

Aby uczynić zadość założeniom twierdzenia podstawiamy:

$$m_2 = 2 \cdot r \cdot w_{n-2} \cdot \cos(\phi) - r^2 \cdot w_{n-3} \quad (184)$$

Natomiast dla $d > 0$ otrzymamy analogicznie:

$$m_2 = 2 \cdot r \cdot w_{n-2} \cdot \cosh(\phi) - r^2 \cdot w_{n-3} \quad (185)$$

Porównując następnie wyrażenie całkowitoliczbowe w_{n-1} z m_2 dochodzimy do wniosku, że dowód twierdzenia Fermata jest równoważny pokazaniu, że m_2 nie będzie liczbą całkowitą, dla zakładanych danych wejściowych $x, y, z \in \mathbb{Z}_+$. ■

14. Zderzenie dwóch obiektów.

Rozpatrujemy następujące zagadnienie:

- Poruszają się dwa obiekty, obiekt M_1 o masie m_1 i prędkości v_1 , obiekt M_2 o masie m_2 i prędkości u_1 .
- Dochodzi do zderzenia i szukamy końcowych prędkości v_2 (dla M_1) i u_2 (dla M_2).
- Uwzględniamy zmianę części energii w ciepło, rozproszona energia podczas zderzenia wynosi Q .

Zachodzą zasady zachowania pędu i energii:

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot u_1 - m_1 \cdot v_2 - m_2 \cdot u_2 = 0 \quad (186)$$

$$\frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot u_1^2 - \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot u_2^2 - Q = 0 \quad (187)$$

Rozwiązujemy układ równań, wówczas otrzymamy dwa rozwiązania.

$$\Delta = m_1 \cdot m_2 \cdot (v_1 - u_1)^2 - 2 \cdot Q \cdot (m_1 + m_2) \quad (188)$$

$$u_{2\pm} = \frac{(m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot u_1) \pm \sqrt{\left(\frac{m_1}{m_2}\right) \cdot \Delta}}{m_1 + m_2} \quad (189)$$

$$v_{2\pm} = \frac{(m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot u_1) \mp \sqrt{\left(\frac{m_2}{m_1}\right) \cdot \Delta}}{m_1 + m_2} \quad (190)$$

Z czego wynika, że maksymalna rozproszona energia wynosi:

$$Q_{max} = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot \frac{(v_1 - u_1)^2}{m_1 + m_2} \quad (191)$$

Rozwiązanie bazujące na u_{2+} jest zderzeniem właściwym, natomiast rozwiązanie bazujące na u_{2-} oznacza przenikanie obiektów z rozproszeniem energii, skutkujące minimalną zmianą prędkości poruszania się, gdzie w przypadku gdy $Q = 0$ prędkości nie zmieniają się.

15. Arytmetyka z zastosowaniem liczb hiperbolicznych.

Przypominamy wzór:

$$a + \mathcal{H} \cdot b = r \cdot e^{\mathcal{H}x} \quad (192)$$

gdzie:

$$a > b, \quad r = \sqrt{a^2 - b^2}, \quad x = \tanh^{-1} \left(\frac{b}{a} \right), \quad \mathcal{H}^2 = 1 \quad (193)$$

$$\cosh(x) = \frac{a}{r}, \quad \sinh(x) = \frac{b}{r} \quad (194)$$

Co daje:

$$(a + b)^n = r^n e^{nx} \quad (195)$$

$$(a - b)^n = r^n e^{-nx} \quad (196)$$

Prowadzi to do tożsamości:

$$(a + b)^n - (a - b)^n = 2r^n \sinh(nx) \quad (197)$$

Co dla $n = 2$ daje:

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 2r^2 \sinh(2x) = 2r^2 \cdot 2 \cdot \sinh(x) \cosh(x) = 4r^2 \cdot \frac{b}{r} \cdot \frac{a}{r} = 4ab \quad (198)$$

W celu znalezienia trójki pitagorejskiej przyjmujemy $a = k^2$, $b = l^2$, i uwzględniamy podobieństwo m . Otrzymujemy wzór:

$$((k^2 - l^2) \cdot m)^2 + (2klm)^2 = ((k^2 + l^2) \cdot m)^2 \quad (199)$$

16. Zastosowania metody przewidywań.

Szukamy postaci zwartej dla następującej sumy w postaci:

$$\sum_{k=0}^n k^s = \sum_{k=1}^s \alpha_k \cdot n^k + \frac{1}{s+1} \cdot n^{s+1} \quad (200)$$

W celu wyznaczenia współczynników α_k tworzymy układ równań w postaci macierzowej, otrzymując kolejne wiersze dla $n = \{1 \dots s\}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 2^2 & \dots & 2^s \\ 3 & 3^2 & \dots & 3^s \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ s & s^2 & \dots & s^s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{s+1} \\ 1 + 2^s - \frac{1}{s+1} \cdot 2^{s+1} \\ 1 + 2^s + 3^s - \frac{1}{s+1} \cdot 3^{s+1} \\ \vdots \\ 1 + 2^s + 3^s + \dots + s^s - \frac{1}{s+1} \cdot s^{s+1} \end{bmatrix} \quad (201)$$

Co pozwala z łatwością wyznaczyć szukane współczynniki α_k . Przykładowo dla $s = 2$ mamy:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{3} \\ 1 + 2^2 - \frac{1}{3} \cdot 2^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{7}{3} \end{bmatrix} \quad (202)$$

Skąd otrzymujemy wynik i wzór:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (203)$$

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{1}{6} \cdot n + \frac{1}{2} \cdot n^2 + \frac{1}{3} \cdot n^3 \quad (204)$$

Inne zastosowanie polega na obliczeniu następującego przykładu:

$$\frac{\sqrt{15} + \sqrt{21} + \sqrt{25} + \sqrt{35}}{\sqrt{3} + \sqrt{7} + \sqrt{20}} = \alpha \cdot \sqrt{3} + \beta \cdot \sqrt{5} + \gamma \cdot \sqrt{7} \quad (205)$$

Po wymnożeniu otrzymujemy układ równań w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} 3 & 10 & 7 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (206)$$

Skąd dostajemy wynik będący odpowiedzią:

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (207)$$

17. Zmiana zmiennych w całce wielokrotnej.

Rozważmy następującą całkę:

$$\iiint_G F(x, y, z) dx dy dz \quad (208)$$

Chcemy zmienić zmienne przez podstawienie:

$$\begin{cases} x = P(u, v, w) \\ y = Q(u, v, w) \\ z = R(u, v, w) \end{cases} \quad (209)$$

Rozważmy różniczki zupełne:

$$\begin{cases} dx = \frac{\partial P}{\partial u} du + \frac{\partial P}{\partial v} dv + \frac{\partial P}{\partial w} dw \\ dy = \frac{\partial Q}{\partial u} du + \frac{\partial Q}{\partial v} dv + \frac{\partial Q}{\partial w} dw \\ dz = \frac{\partial R}{\partial u} du + \frac{\partial R}{\partial v} dv + \frac{\partial R}{\partial w} dw \end{cases} \quad (210)$$

Czyli w notacji macierzowej:

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial u} & \frac{\partial P}{\partial v} & \frac{\partial P}{\partial w} \\ \frac{\partial Q}{\partial u} & \frac{\partial Q}{\partial v} & \frac{\partial Q}{\partial w} \\ \frac{\partial R}{\partial u} & \frac{\partial R}{\partial v} & \frac{\partial R}{\partial w} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} du \\ dv \\ dw \end{bmatrix} \quad (211)$$

Mamy dalej:

$$dx dy dz = \begin{vmatrix} \frac{\partial P}{\partial u} & \frac{\partial P}{\partial v} & \frac{\partial P}{\partial w} \\ \frac{\partial Q}{\partial u} & \frac{\partial Q}{\partial v} & \frac{\partial Q}{\partial w} \\ \frac{\partial R}{\partial u} & \frac{\partial R}{\partial v} & \frac{\partial R}{\partial w} \end{vmatrix} \cdot du dv dw \quad (212)$$

Co wynika z własności metryki i następujących ogólnych zasad:

$$\begin{cases} dr \cdot dr = 0 \\ dr \cdot ds = -ds \cdot dr \end{cases} \quad (213)$$

Metryka jest zawsze nieujemna. Otrzymujemy zatem wzór:

$$\iiint_G F(x, y, z) dx dy dz = \iiint_H F(P, Q, R) \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial P}{\partial u} & \frac{\partial P}{\partial v} & \frac{\partial P}{\partial w} \\ \frac{\partial Q}{\partial u} & \frac{\partial Q}{\partial v} & \frac{\partial Q}{\partial w} \\ \frac{\partial R}{\partial u} & \frac{\partial R}{\partial v} & \frac{\partial R}{\partial w} \end{vmatrix} \cdot du dv dw \quad (214)$$